

RIMBORSO GRADUALE DI UN CAPITALE E PAGAMENTO PERIODICO D'INTERESSI O AMMORTAMENTO

Il debitore paga ogni anno (o ogni periodo) una rata composta da

- una **quota di capitale**, C_k , che rimborsa gradualmente la somma mutuata
- una **quota interesse**, I_k , commisurata al debito residuo dell'anno(o periodo) precedente.

La rata generica è:

$$R_k = C_k + I_k$$

In ogni ammortamento deve succedere che la somma delle quote capitali, C_k , sia uguale alla somma mutuata o capitale preso in prestito. In simboli si ha:

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = S$$

vale in tutti i tipi di ammortamento e prende il nome di *condizione di chiusura elementare*.

Nell'ammortamento si ha un rimborso graduale del prestito. Pertanto la funzione debito residuo, D_k , è una funzione decrescente a gradini e valgono le seguenti relazioni:

- il debito residuo al tempo zero coincide con la somma mutuata cioè $D_0 = S$
- il debito residuo in n deve essere nullo $D_n = 0$ per definizione di ammortamento
- il penultimo debito residuo rappresenta l'ultima quota di capitale $D_{n-1} = C_n$
- il debito residuo corrente è uguale al debito residuo dell'anno precedente diminuito della quota di capitale corrente, in formule:

$$D_k = D_{k-1} - C_k$$

Nell'ammortamento la quota interesse sarà decrescente perché è commisurata al debito residuo dell'anno (o periodo) precedente:

$$I_1 = S i \quad (\text{la prima quota paga interessi su tutto il capitale mutuato})$$

$$I_2 = (S - C_1) i = D_1 i$$

$$I_3 = (S - C_1 - C_2) i = D_2 i$$

generalizzando:

$$I_k = D_{k-1} i$$

Si ricordi che il tasso si riferisce alla periodicità prevista dal piano d'ammortamento. Il piano di ammortamento è un prospetto dove per ogni periodo (anni, semestri, ecc) vengono elencati gli elementi dell'ammortamento:

R_k la rata da pagare nel periodo k -esimo (annua, semestrale, ecc.)

C_k la quota di capitale del periodo k -esimo (annua, semestrale, ecc.), che va a diminuire il debito residuo

I_k la quota d'interesse del periodo k -esimo (annua, semestrale, ecc.), che è commisurata al debito residuo del periodo precedente

D_k debito residuo (succederà sempre $D_0 = S$ e $D_n = 0$)

E_k debito estinto (ovviamente, vale l'identità $D_k + E_k = S$ questa colonna da alcuni Autori non è prevista).

In un ammortamento applicando il principio di equivalenza alla data in cui viene concesso il mutuo deve succedere che la somma mutuata (prestazione ricevuta) deve essere uguale alle controprestazioni a cui si obbliga il debitore, e cioè la somma dei valori attuali delle singole rate previste dal piano. In simboli:

$$S = R_1 (1 + i)^{-1} + R_2 (1 + i)^{-2} + \dots + R_n (1 + i)^{-n}$$

in forma compatta:

$$S = \sum_{k=1}^n R_k (1 + i)^{-k}$$

Se le rate sono costanti e posticipate si ha:

$$S = R a_n i.$$

Questa viene detta condizione di *chiusura iniziale*. Analogamente, il principio di equivalenza all'atto dell'ultimo pagamento si ha:

$$S (1 + i)^n = R_1 (1 + i)^{n-1} + R_2 (1 + i)^{n-2} + \dots + R_n (1 + i)^{n-n}$$

Se le rate sono costanti e posticipate si ha:

$$S = R s_n i.$$

detta condizione di *chiusura finale*.

Esempio

Si completi il seguente piano di ammortamento dettagliando i valori man mano che si trovano. Si verifichino le condizioni di chiusura elementare ed iniziale.

t_k	k	R_k	C_k	I_k	D_k
0	0	-	-	-	5.600
1	1		1.230		
3	2				2.561
6	3			389	

Preliminarmente si osserva che si tratta di un ammortamento generico posticipato in quanto al tempo 0 non ci sono pagamenti. Inoltre, si osserva che le tre rate previste non sono periodiche la prima è pagata dopo un periodo la seconda dopo due periodi e l'ultima dopo tre. Dai dati a disposizione si calcolano:

$$D_1 = D_0 - C_1 = 4.370$$

dalla relazione:

$$I_k = D_{k-1} i$$

si ricava:

$$i_3 = I_3 / D_2 = 389 / 2.561 = 0,1518938$$

esso rappresenta il tasso periodale riferito agli interessi che maturano dal tempo tre al tempo sei. Pertanto, i tassi degli altri due periodi sono:

$$i_1 = (1 + i_3)^{1/3} - 1 = 0,04826$$

$$i_2 = (1 + i_3)^{2/3} - 1 = 0,09886$$

indi, si può completare la colonna delle quote d'interessi:

$$I_1 = D_0 i_1 = 270,26$$

$$I_2 = D_1 i_2 = 432,02$$

la colonna delle quote di capitali si completa così:

$$C_2 = D_1 - D_2 = 4.370 - 2.561 = 1.809$$

ed essendo un ammortamento posticipato deve valere la relazione:

$$D_{n-1} = C_n$$

nel caso proposto:

$$D_2 = C_3 = 2.561$$

Le varie rate si trovano sommando i valori omologhi delle colonne delle quote di capitale e d'interesse:

$$R_1 = C_1 + I_1 = 1.500,26$$

$$R_2 = C_2 + I_2 = 2.241,02$$

$$R_3 = C_3 + I_3 = 2.950$$

A questo punto è possibile verificare la condizione di chiusura elementare:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 5.600$$

Per il riscontro della condizione di chiusura iniziale si calcolano i valori attuali della rate, tenendo conto della diversa periodicità:

$D_k(1+i)^{-t_k}$
-
1.431,19
1.945,53
2.223,35

la somma dei valore attuali è 5.600,07 ovviamente, i 7 centesimi di differenza sono dovuti alle approssimazioni.